SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI PARABOLICHE ASTRATTE E APPLICAZIONI

3 DICEMBRE 1987

INTRODUZIONE

Vorrei presentare alcune applicazioni a problemi differenziali concreti di un risultato di esistenza e unicità per la soluzione dell'equazione

(1) $BMu + Lu = \tilde{F}(u);$

nella (1) B è un operatore lineare chiuso invertibile da E in sé, L e M sono operatori lineari chiusi da F in E, E ed F spazi di Banach complessi e $\tilde{F}$ è non lineare da un sottoinsieme di F in E.

Vogliamo subito notare che l'equazione più generale

(2) $BMu = f(u)$

può essere messa sotto la forma (1) se, per esempio, f è differenziabile in un punto u_o di F, perchè allora (2) diventa

$$BMu = f'(u_o)u + G(u),$$

$G(u) = f(u) - f'(u_o)u.$

E' opportuno richiamare le ipotesi che sono state fatte in [5,6] per trattare la (1).

(A) D(B) è denso in E e $\forall z\in C$, $|\pi - \arg z|\leq\phi<\pi/2$ esiste $(B-z)^{-1}\in\mathscr{L}(E)$ e $\|(B-z)^{-1};\mathscr{L}(E)\|\leq C(1+|z|)^{-1}$.

(B) L è invertibile, $\mathscr{D}(L) = D(L)\subseteq D(M)$ e $\forall z$, $|\arg z|< \pi-\phi+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ piccolo, esiste $(zM+L)^{-1}\in\mathscr{L}(E;F)$ e c'è C>0 tale che, se $T = ML^{-1}$, $\|L(zM+L)^{-1};\mathscr{L}(E)\|=\|(zT+1)^{-1};\mathscr{L}(E)\|\leq C$.

Sia Γ la curva orientata di C parametrizzata da $\rho\to\rho\exp(\pm i\Phi),\rho\geq a_0>0$, $\Phi=\phi+\varepsilon/2$ e $\rho\to a_0\exp(i\rho)$, $|\rho|\leq\Phi$. Sia poi $V_\theta=(E;\mathscr{D}(B))_{\theta,\infty}$ lo spazio di interpolazione reale tra E e $\mathscr{D}(B)$. L'assunzione (C) è la seguente:

(C) $\exists\theta\in]0,1[$ tale che $\forall z\in\Gamma$ esiste il commutatore $[B;(zT+1)^{-1}]$, esso ha estensione limitata da E in sé e da V_θ in sé, con

$$\max\{\|[B;(zT+1)^{-1}];\mathscr{L}(E)\|,\|[B;(zT+1)^{-1}];\mathscr{L}(V_\theta)\|\}\leq C(1+|z|)^\sigma,\ 0\leq\sigma<1.$$

Veniamo alle ipotesi su F(u).

Sia $r>0$ e poniamo $\tilde{S}_r=\{h\in V_\theta,\|h;V_\theta\|\leq r\}$.

(D) C'è una costante $k>0$ e una $\beta>0$, $\beta<k$, tali che

$$\|\tilde{F}(L^{-1}h);V_\theta\|\leq rk\quad\forall h\in\tilde{S}_r,$$

$$\|\tilde{F}(L^{-1}h_1)-\tilde{F}(L^{-1}h_2);V_\theta\|\leq\beta\|h_1-h_2;V_\theta\|,\ h_1,h_2\in\tilde{S}_r.$$

Si ha [6]:

Teorema 1. *Valgano* (A),(B),(C),(D). *Allora* (1) *ha esattamente una soluzione* u *tale che* $Lu\in V_\theta$.

Una applicazione.

Sia $L(t)$, $M(t)$, $0\leq t\leq\tau$, due famiglie di operatori lineari chiusi da Y in X, X,Y spazi di Banach, tali che

(i) $L(t)$ è invertibile $\forall t\in[0,\tau]$,

(ii) $\mathscr{D}(L(t))\subseteq\mathscr{D}(M(t))$, $\forall t\in[0,\tau]$,

(iii) $t\to M(t)L(t)^{-1}=T(t)$ è continua da $[0,\tau]$ in $\mathscr{L}(X)$,

(iv) $t \to L(t)^{-1}$ è continua da $[o,\tau]$ in $\mathscr{L}(X,Y)$.

(v) $\|(zT(t)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\| = \|L(t)(zM(t)+L(t))^{-1};\mathscr{L}(X)\| \le Cost$, $\forall z$, $Re z \ge 0$, $0 \le t \le \tau$

(vi) $t \to T(t) \in C^{(1)}[0,\tau;\mathscr{L}(X)]$ e

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\right\| \le C(1+|z|)^{1-\rho}, \quad 0<\rho\le 1,$$

(vii) $\|T'(t)-T'(s);\mathscr{L}(X)\| \le C|t-s|^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon\le 1$.

<u>Lemma</u> $\left\|\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(zT(s)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\right\| \le C|t-s|^{\varepsilon}\ |z|^{2-\rho}$.

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(zT(s)+1)^{-1} =$$

$$= z\{(zT(s)+1)^{-1}T'(s)(zT(s)+1)^{-1} - (zT(t)+1)^{-1}T'(t)\ (zT(t)+1)^{-1}\}$$

e, inoltre,

$$(zT(s)+1)^{-1}-(zT(t)+1)^{-1} = \int_t^s \frac{\partial}{\partial \tau}(zT(\tau)+1)^{-1}d\tau$$

implica

$$\|(zT(s)+1)^{-1} - (zT(t)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\| \le C(1+|z|)^{1-\rho}|t-s|.$$

Prendiamo $E = C_0[0,\tau;X]$, $\mathscr{D}(B) = \{u \in C_0^{(1)}[0,\tau;X];\ u'(0) = 0\}$,

$Bu = u'$, cosicchè $(E,D(B))_{\theta,\infty} = V_\theta = \{u:[0,\tau]\to X;$ u continua,

$$\max_{0\le t\le\tau} \|u(t);X\| + \sup_{\substack{o\le t,s\le\tau\\ t\ne s}} \frac{\|u(t)-u(s);X\|}{|t-s|^\theta} = |||u|||_\theta < \infty,\ u(o)=0\} = C_0^\theta[o,\tau;X].$$

Sia $0<\omega\le\varepsilon$. Allora $\forall u\in C_0^\omega[o,\tau;X]$,

$$\|[\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1}]u(t) - [\frac{\partial}{\partial s}(zT(s)+1)^{-1}]u(s);X\| \le$$

$$\le C|t-s|^\varepsilon\ |z|^{2-\rho}\|u(t);X\|+C|z|^{1-\rho}\|u(t)-u(s);X\|$$

e così

$$\frac{\|[\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1}]u(t)-[\frac{\partial}{\partial s}(zT(s)+1)^{-1}]u(s);X\|}{|t-s|^\omega} \le c|z|^{2-\rho}\|u\|_\omega.$$

Di qui, poichè l'operatore $[B;(zT+1)^{-1}]$ è l'operatore di moltiplicazione per $\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)$, si ha

$$\|[B;(zT+1)^{-1}];L(E)\|\le C(1+|z|)^{1-\rho}\ ,\quad \text{(per la (vi))},$$

$$\|[B;(zT+1)^{-1}];L(V_\omega)\|\le C(1+|z|)^{2-\rho},$$

e quindi, per interpolazione, poichè il teorema di iterazione ci assicura che $(E,V_\omega)_{\sigma,\infty} = V_{\sigma\omega}$, $0<\sigma<1$, si ha

$$\|[B;(zT+1)^{-1}];L(V_{\sigma\omega})\|\le C(1+|z|)^{1-(\rho-\sigma)}$$

Pertanto, se $0<\sigma<\rho$, si ha una stima del tipo (C) in ogni spazio V_ν con $0<\nu<\rho\varepsilon$.

Osserviamo che se $\varepsilon=1=\rho$, il caso migliore, allora ν può variare fra 0 e 1. Pertanto, in forza del Teorema di esistenza di [6],

<u>Teorema 2.</u> *Valgono* (i)-(vi) *e sia* $0<\nu<\rho\varepsilon$.

Sia $f\in C^{\nu}[o,\tau,X]$ *e sia* $w_o\in X$ *tale che* $w_o(=T(o)v_o)\in\mathscr{R}(T(o))$, $f(o)-v_o-T'(o)v_o\in\mathscr{R}(T(o))$.

Allora il problema

$$(P)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(M(t)u(t))+L(t)u(t) = f(t),\ 0\leq t\leq\tau, \\ \lim\limits_{t\downarrow o} M(t)u(t) = M(o)u(o) = w_o, \end{cases}$$

ha una unica soluzione stretta u *con* $L(\cdot)u(\cdot)\in C^{\nu}[o,\tau;X]$.

<u>Esempio 1.</u> Sia Ω un dominio limitato di R^n di classe C^m. Si assume che

$$A(t,x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(t,x)D^\alpha$$

è fortemente ellittico, uniformemente in $t\in[0,\tau]$ e per ogni t i coefficienti delle derivate di ordine massimo sono continue in $\bar\Omega$ e gli altri coefficienti sono limitati e misurabili in Ω e

$$\max_{|\alpha|\leq 2m}\ \sup_{x\in\Omega} |a_\alpha^{(k)}(t,x)-a_\alpha^{(k)}(s,x)|\leq L|t-s|^h,\ k=0,1,\ a_\alpha^{(1)}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}a_\alpha(t,x),$$

$0<h\leq 1$. Sia

$$B_j(t,x,D) = \sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta\ ,\quad j = 1,\dots,m,\quad x\in\partial\Omega$$

un insieme di operatori differenziali normali, soddisfacente, per esempio, le ipotesi in [15, p. 140]. Posto, per $1<p<\infty$,

$$D(L(t)) = \{u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j(t,x,D)u(x)=0,\ x \in \partial\Omega,\ j=1,\dots,m\}$$

$$(L(t)u(x) = A(t,x,D)u(x),\ u \in D(L(t)),$$

$$M(t) = I = \text{operatore identico},$$

se si prende $X = Y = L^p(\Omega)$, si vede [15, pp. 140-144] che sono soddisfatte tutte le ipotesi (i)-(vi).

Kato e Tanabe nel lavoro fondamentale [9] hanno dato un esempio molto generale di operatore $L(t)$ definito da una forma sesquilineare in uno spazio di Hilbert, a dominio *dipendente* da t, per cui tutte le condizioni precedenti valgono, con $\rho = 1/2$.

Sempre a proposito di forme sesquilineari, diamo un secondo esempio.

Esempio 2. Siano $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ spazi di Hilbert complessi e separabili, con immersioni continue e dense, e così si può, identificando H col suo antiduale, dedurre che $H \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$ densamente.

Per ogni $t \in [0,\tau]$, $\tau>0$, siano $a_0(t;u,v)$, $u,v \in V$, $a_1(t;x,y)$, $x,y \in W$, due forme sesquilineari su V e W, rispettivamente, tali che

$$|a_0(t;u,v)| \le C_1 \|u;V\|\ \|v;V\|,$$

$$\text{Re}\ a_0(t;u,u) \ge C_2 \|u;V\|^2,$$

$$|a_1(t;x,y)| \le C_3 \|x;W\|\ \|y;W\|,$$

$$a_1(t;x,x) \ge 0,\ t \in [0,\tau],\ x \in W.$$

$a_0(t;u,v)$, $a_1(t;x,y)$, $u,v \in V$, $x,y \in W$ sono di classe $C^{(1)}$ int e

$|a_0'(t;u,v)|\le C_4\|u;V\|\ \|v;V\|$

$|a_0'(t;u,v)-a_0'(s;u,v)|\le C_5|t-s|^\varepsilon\|u;V\|\ \|v;V\|, 0<\varepsilon\le 1.$

$|a_1'(t;u,v)|\le C_6|a_1(t;u,v)|, u,v\in V,\ |a_1(t;u,v)-a_1(s;u,v)|\le$

$\le C_7|t-s|^\varepsilon\|u;W\|\ \|v;W\|.$

Posto $D(L(t)) = V$, $(L(t)u)v = a_0(t;u,v)$, $u,v\in V$, $D(M(t)) = W$, $(M(t)x)y = a_1(t;x,y)$, $x,y\in W$, si vede facilmente che valgono (i)-(vi), con $\rho = 1$, e (vii). Si noti, infatti, che $(L(t)^{-1})' = -L(t)^{-1}L'(t)L(t)^{-1}$ e

$$\|[L(t)^{-1}-L(s)^{-1}]f;V\|\le c|t-s|\|f;V'\|,$$

poichè

$$\|[L(t)-L(s)]u;V'\|\le k|t-s|\ \|u;V\|,$$

$$\|L'(t)-L'(s);L(V;V')\|\le k_1|t-s|^\varepsilon,\ \|M(t)-M(s);L(V,V')\|\le k_2|t-s|,$$

$$\|M'(t)-M'(s);L(V,V')\|\le k_2|t-s|^\varepsilon.$$

<u>Applicazione</u>. Sia Ω un aperto limitato di R^n, $n\ge 1$, a frontiera $\partial\Omega$ regolare. Si pone

$$a_0(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\bar v}{\partial x_j} + c(t,x)u\bar v)dx\ ,\ u,v\in H_0^1(\Omega)= V \hookrightarrow L^2(\Omega) = H,$$

dove i coefficienti a_{ij}, c sono sufficientemente regolari e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) z_i \bar{z}_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \quad , \quad z_i \in C,$$

$c(t,x) \geq 0$, $\gamma > 0$.

Sia $m(t,x) \geq 0$ continua su $[o,\tau] \times \bar{\Omega}$. Allora come $a_1(t;u,v)$ si prende

$$a_1(t;u,v) = \int_\Omega m(t,x) u\bar{v} dx ;$$

la condizione fondamentale sulla $m(t,x)$ per poter applicare il Teorema 2 è che esista $\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)$ continua e

$$\left| \int_\Omega \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) u(x) \bar{v}(x) dx \right| \leq C \left| \int_\Omega m(t,x) u(x) \bar{v}(x) dx \right|$$

Chiaramente, ciò è soddisfatto se $m(t,x) = k(t)m(x)$, con $|k'(t)| \leq c\, k(t)$. Un'altra scelta possibile per $a_1(t;u,v)$ è data da

$$a_1(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (b_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}) dx,$$

dove $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t,x) z_i \bar{z}_j \geq 0$ $\forall z_i$ complesso e b_{ij}, $\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}$ sono opportuni.

<u>Osservazione 1.</u> Se $M(t) \in L(V;V')$ ha inverso limitato con $C_1 \| u;V \| \leq \| M(t)u;V' \| \leq C_2 \| u;V \|$, cioè, nel caso precedente $a_1(t;u,u) \geq k \| u;V \|^2$, $k>0$, la ipotesi $|a_1'(t,u,v)| \leq K \| u;V \| \; \| v;V \|$ assicura che $\| (zT(t)+1)^{-1}; \mathscr{L}(V') \|$, $\| \frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1}; \mathscr{L}(V') \| \leq \text{Cost}$. Quindi se $a_1(t;u_1 u) \geq k \| u;V \|^2$, $k>0$, $u \in V$, e

$$|a_1'(t;u,v) - a_1'(s;u,v)| \leq C |t-s|^\varepsilon \| u;V \| \; \| v;V \|,$$

il Teorema 2 si applica immediatamente.

Questo permette di trattare equazioni di tipo Sobolev.

Osservazione 2. P.Acquistapace e B. Terreni [1] hanno mostrato che sotto condizioni analoghe a quelle dell'Esempio 1 si possono dedurre tutte le stime (i)-(vii) quando $X = C(\bar{\Omega})$ invece di $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$.

Osservazione 3. Sia M un operatore limitato e non negativo da H in sé, dove H è uno spazio di Hilbert separabile. Posto $a_1(u,v) = \langle Mu,v\rangle$, ($\langle,\rangle$ denota il prodotto interno di H), se $a_0(t;u,v)$ è una forma sesquilineare nello spazio di Hilbert V immerso densamente in H soddisfacente le condizioni dell'Esempio 2, poichè $\mathrm{Re}\lambda a_1(u,u)+a_0(t;u,u)\geq C\|u;V\|^2$, per ogni $u\in V$, quanto detto in tale esempio consente di trattare problemi degeneri del tipo

$$\frac{d}{dt}(Mu) + L(t)u = f,$$

con $f\in C^\nu[o,\tau;V']$.

Veniamo al problema non lineare. A tal fine, supporremo

(H) C'è uno spazio di Banach $Y_1 \hookrightarrow Y$ con immersione continua tale che

$$\|L(t)^{-1}-L(s)^{-1};\mathscr{L}(X,Y_1)\|\leq k\,|t-s|^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leq 1.$$

(K) $(t,y) \to f(t,y)$ è di classe $C^{(1)}$ come applicazione da $[o,\tau]\times V$ in X, essendo V un intorno di $u_0\in Y_1\cap\mathscr{D}(L(o))$ in Y_1 e

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,y);\mathscr{L}(Y_1;X)\right\|\leq k(|t-s|^{\beta}+\|x-y;Y_1\|),$$

$t,s\in[o,\tau]$, $x,y\in V$;

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}(0,u_0);\mathscr{L}(Y_1;X)\| \leq \eta \ , \ \eta \text{ piccolo}$$

(L) $$\omega_0 = M(o)u_0$$

$$f(o,u_0) - (I+T'(o))L(o)u_0 \in \mathscr{R}(T(o)).$$

Teorema 3. *Valgano* (i)-(vii), (H), (K), (L). *Sia*

$$0 < \nu < p\varepsilon \ , \ \nu \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Allora se τ, η *sono sufficientemente piccoli, c'è una unica soluzione stretta* u *del problema*

(3) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t,u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)_{|t=0} = \omega_0, \end{cases}$$

tale che $L(\cdot)u, \ \frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot)) \in C^{\nu}[o,\tau;X]$.

Applicazione 1. Sia $L(t):D \to X$ una famiglia di operatori lineari chiusi a dominio indipendente da t, $M:Y \to X$ chiuso, tali che

(4) $$L'(\cdot) \in C[o,\tau;L(D,X)], \ \|L(o)(zM+L(o))^{-1}: \mathscr{L}(X)\| \leq \text{Cost.} \quad \text{Re}z \geq 0.$$

Il problema lineare

(P)' $$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + L(t)u(t) = f(t), \ 0 \leq t \leq \tau, \\ Mu(t)_{|t=0} = w_0 \end{cases}$$

si scrive nella forma (3), con

$$f(t,u) = [L(o)-L(t)]u + h(t), \quad t \in [o,\tau], \quad u \in D .$$

Si prenda D come spazio Y_1 nel TEOREMA 3. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial u}(o,u_0) = 0$$

e (K) è soddisfatta se $h \in C^{(1)}[0,\tau,X]$ e

$$\|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) - \frac{\partial f}{\partial u}(s,v);L(D;X)\| \leq \|L(t)-L(s);L(D;X)\| \leq k|t-s|^{\beta},$$

la ben nota condizione H.Tanabe [vedi [15, p. 118], per esempio]:

$$(5) \qquad \|[L(t)-L(s)]L(o)^{-1};\mathscr{L}(X)\| \leq k|t-s|^{\beta}.$$

Poichè $L(o)[L(t)^{-1}-L(s)^{-1}] = L(o)L(t)^{-1}[L(s)-L(t)]L(o)^{-1}\{L(o)L(s)^{-1}\}$, anche (H) vale con $\alpha = \beta$.

(L) diventa la condizione di compatibilità in $t = 0$

$$(6) \qquad h(o) - L(o)u_0 \in \mathscr{R}(ML(o)^{-1}).$$

Pertanto:

<u>Teorema 4.</u> *Valgono le ipotesi* (4), (5), (6).

Allora il problema (P)' *ha una unica soluzione stretta su* $[o,\tau]$, τ *sufficientemente piccolo,* $\forall h \in C^{(1)}[o,\tau;X]$.

<u>Esempio 3.</u> Siano $a_0(t;u,v), u,v \in V$, $a_1(x,y)$, $x,y \in W$ forme sesquilineari sugli spazi di Hilbert V,W,$V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$, come nell'<u>Esempio 2</u>, tali che

$$|a_0(t;u,v)|\leq c_1\|u;V\|\ \|v;V\|,$$

$$\mathrm{Re}\,a_0(t,u,u)\geq c_2\|u;V\|^2,\ c_2>0,$$

(E) $$|a_1(x,y)|\leq c_3\|x;W\|\ \|y;W\|,$$

$$a_1(u,u)\geq 0\quad \forall u\in V,$$

$$|a_0(t;u,v)-a_0(s;u,v)|\leq k|t-s|^{\beta}\|u;V\|\ \|v,V\|,$$

$\forall u,v\in V$ esiste la derivata $\dot{a}_0(t;u,v)$ e

$$|\dot{a}_0(t;u,v) - \dot{a}_0(s;u,v)|\leq c\|u;V\|\ \|v;V\|\ |t-s|^a\ ,\quad o<a\leq 1.$$

Allora (vedi [15], pp. 144-145) le condizioni (4),(5) sono soddisfatte. Se u_0 e h verificano la (6) si ottiene la risolubilità di (P)'.

Notiamo che applicando direttamente il Teorema 1 si potrebbero indebolire le ipotesi di regolarità su $a_0(t;u,v)$ e $h(t)$. Basta osservare che, con $h(o)-v_0 = h(o)-L(o)u_0 = ML(o)^{-1}v_1$,

$$\tilde{F}(w)(t) = [L(o)-L(t)]L(o)^{-1}w(t)+[L(o)-L(t)]L(o)^{-1}[v_0+v_1t]+h(t)-h(o)-v_1t,\text{si ha}$$

$$\tilde{F}(w)(t)-\tilde{F}(w)(s)=[L(o)-L(t)]L(o)^{-1}[w(t)-w(s)]+[L(s)-L(t)]L(o)^{-1}w(s)+$$

$$+(t-s)[L(o)-L(t)]L(o)^{-1}v_1+s[L(o)-L(t)]L(o)^{-1}v_1+[L(s)-L(t)]L(o)^{-1}v_0+h(t)-h(s)-v_1(t-s)$$

e così

$$\|\tilde F(w);C_0^\nu[o,\tau;V']\| \le c\,\tau^\beta\|w;C_0^\nu[o,\tau;V']\| + C\,\tau^{\beta-\nu}\tau^\nu\|w;C_0^\nu[o,\tau;V']\| +$$

$$+ C\tau^{1-\nu}\,\tau^\beta\|v_1;V'\| + c\tau\cdot\tau^{\beta-\nu}\|v_1;V'\| + C\,\tau^{\beta-\nu}\|v_0;V'\| + \tau^{\beta-\nu}\,C\|h,C_0^\beta[o,\tau;V']\| +$$

$$+\tau^{1-\nu}\|v_1;V'\|\ {}_{\tau\to o+}\ o \text{ uniformemente su } \|w;C_0^\nu[o,\tau;V']\| \le r.$$

Inoltre

$\|\tilde F(w_1)-\tilde F(w_2);C_0^\nu[o,\tau;V']\|$ si maggiora con

$$\|[L(o)-L(t)]L(o)^{-1};\mathscr{L}(V')\|\ \|w_1-w_2;C_0^\nu[o,\tau;V']\| +$$

$$+ \left(\sup \frac{\|[L(t)-L(s)]L(o)^{-1};\mathscr{L}(V')\|}{|t-s|^\beta}\right)\tau^{\beta-\nu}\cdot C\tau^\nu\|w_1-w_2;C_0^\nu[o,\tau;V']\| \le$$

$$\le C\tau^\beta\|w_1-w_2;C_0^\nu[o,\tau;V']\|.$$ Di qui:

<u>Corollario 1.</u> *Valgano tutte le ipotesi in* (E) *e sia* $0<\nu<\beta$. *Se* $h\in C^\beta[o,\tau;V']$, $h(o)-L(o)u_0\in\mathscr{R}(ML^{-1})$, *allora c'è una unica soluzione stretta di* (P)' *su* $[o,\tau],\tau$ *sufficientemente piccolo.*

<u>Applicazione 2</u> (<u>Equazioni integro-differenziali</u>).

Sia $K(t)$ un operatore lineare chiuso da Y in X per ogni $t\in[o,\tau]$ tale che $(s,t)\to K(t-s)L(s)^{-1}$ è continua da $\Delta=\{(s,t);\ 0\le s\le t\le T\}$ in $L(X)$. Siamo interessati al problema di trovare una soluzione stretta $u=u(t)$ per

$$\text{(P)''}\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = \displaystyle\int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t),\ 0\le t\le\tau,\\[2ex] M(t)u(t)\big|_{t=o} = w_0. \end{cases}$$

Allo scopo, si assume che $L(t)$, $M(t)$ soddisfano (i)-(vii), (H) ed esiste uno spazio di Banach $Y_1 \hookrightarrow Y$ tale che

$$(M) \qquad \begin{aligned} & D(L(t)) \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow D(K(s)) \quad \forall t,s \in [o,\tau] \\ & e \quad K(t) \text{ è continuo da } [o,\tau] \text{ in } \mathscr{L}(Y_1;X)\,. \end{aligned}$$

Adoperando una tecnica analoga a quella che ha portato al <u>Corollario</u> precedente (cioè, applicando direttamente il <u>Teorema 1</u>), si vede [cfr. [7]]

<u>Corollario 2.</u> *Valgano* (i)-(vii), (H), (M), $0<\nu<\min\{\rho\varepsilon,\alpha\}$. *Allora per ogni* $f\in C^{\nu}[o,\tau;X]$ *e* $w_0 = T(o)v_0$ *tali che* $f(o) - (I+T'(o))v_0 \in \mathscr{R}(T(o))$, *il problema* (P)" *ha una unica soluzione stretta locale* u, *con* $L(\cdot)u(\cdot)$, $\frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot)) \in C^{\nu}[o,\tau;X]$.

<u>Applicazione 3.</u> Siano $A(t,x,D)$, $B_j(t,x,D)$, $j = 1,\dots,m$ operatori differenziali come quelli dell'<u>Esempio 1.</u>

Posto

$$K(t,x,D) = \sum_{|\gamma|\le q} c_{\gamma}(t,x)D^{\gamma},$$

dove $0\le q\le 2m$

e le $c_{\gamma}(t,x)$ sono regolari nel senso che

$$\max_{|\gamma|\le q}\ \sup_{x\in\bar{\Omega}} |c_{\gamma}(t',x)-c_{\gamma}(t'',x)|\le k\ |t'-t''|^{a}, \quad o < a\le 1, \quad k_1>0,$$

si prenda come Y_1 lo spazio $W^{2m,p}(\Omega)$. Il Lemma 5.3.4. in [15, p. 142] assicura che (H) è soddisfatta ($X = L^{p}(\Omega)$).

L'operatore $K(t)$ definito da $K(t,x,D)$ è continuo da $[o,\tau]$ in $\mathscr{L}(Y_1;X)$ in forza della ipotesi di regolarità sui suoi coefficienti.

Così si può utilizzare il <u>Corollario 2</u>.

Applicazione 4. Mettiamoci nella situazione dell'Esempio 3. Assumiamo che $\forall t \in [o,\tau]$, $K(t)$ è l'operatore lineare associato a una forma sesquilineare $a_2(t;u,v), u,v \in V$, tale che

$$|a_2(t;u,V)| \le C\|u;V\| \, \|v;V\|$$

$$|a_2(t,u,v)-a_2(s;u,v)| \le C_1 |t-s|^a \, \|u;V\| \, \|v;V\|, u,v \in V,$$

$$(t,s) \in [o,\tau]x[o,\tau],\ o<a\le 1.$$

Le ipotesi del Corollario 2 sono così tutte soddisfatte.

Ulteriori risultati astratti. Accenniamo come problemi a prima vista più generali possano ricondursi al problema (3).

Sia $M(t)$, $o\le t\le\tau$, una famiglia di operatori lineari chiusi da Y_1 in X e sia $g(t,u)$ una applicazione da $[o,\tau]xV$ a X, dove V è un intorno di $u_o \in Y_1$; X e Y_1 sono spazi di Banach.

Assumiamo g di classe $C^{(1)}$ con $\frac{\partial g}{\partial u}(t,u_o) = \mathscr{L}(t) \in \mathscr{L}(Y_1;X)$. Scriviamo l'equazione

$$(P)_1 \qquad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t,u(t)),\ 0\le t\le\tau,$$

sotto la forma

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -\mathscr{L}(t)u(t) + \{g(t,u(t)) + \mathscr{L}(t)u(t)\}$$

Se $Y(t)$ è un sottospazio di Y_1 $\forall t \in [o,\tau]$ tale che la restrizione di $\mathscr{L}(t)$ a $Y(t)$, che denotiamo con $L(t)$, soddisfa tutte le assunzioni (i)-(vii), allora il Teorema 3 ci permette di risolvere

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + \{g(t,u(t)) + \bar{\mathscr{L}}(t)u(t)\}\ ,\ o\le t\le\tau,$$

$$M(t)u(t)_{|t=o} = w_o,$$

purchè $w_o=M(o)u_o$, $u_o \in D(L(o)) = Y(o)$,

$L(t)$ soddisfa (H),

(N) $\qquad \|\frac{\partial g}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s,u_2);\mathscr{L}(Y_1;X)\| \leq k(|t-s|^{\beta}+\|u_1-u_2;Y_1\|)$, $t,s\in[o,\tau], u_1,u_2\in V$,

$g(o,u_o) - T'(o)L(o)u_o \in \mathscr{R}(T(o))$.

Notiamo che, definito $\tilde{F}(t,y) = g(t,u) - \frac{\partial f}{\partial u}(t,u_o)u$, si ha $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(o;u_o) = 0$. Quindi,

<u>Teorema 4.</u> *Valgano* (i)-(vii) *e* (N). *Se* $o<\nu<p\varepsilon$, $\nu\leq\alpha,\beta\leq 1$, *allora c'è una unica soluzione locale stretta* u *del problema* $(P)_1$, *soddisfacente* $M(t)u(t)|_{t=o} = w_o$, $L(\cdot)u(\cdot)\in C^{\nu}[o,\tau;X]$.

Le ipotesi del <u>Teorema 4</u> si semplificano nel caso in cui $M(t)=M$ è indipendente da t e anche $\mathscr{D}(\frac{\partial g}{\partial u}(t,u))$ non varia con t e u.

Posto $L = -\frac{\partial g}{\partial u}(o,u_o): D \to X$, $\tilde{F}(t,u) = g(t,u)-Lu$, si ha

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(s,u_2) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s,u_2)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(o,u_o) = 0.$$

Pertanto,

<u>Teorema 5.</u> *Gli operatori* M e $\frac{\partial g}{\partial u}(o,u_o) = L$ *soddisfino*

$$\|L(zM+L)^{-1};\ L(X)\| \leq \text{Cost.}\quad \forall z\in C,\quad \operatorname{Re} z\geq o,$$

$g = g(t,u)$ *sia di classe* $C^{(1)}$ *da* $[o,\tau]\times V$ *in* X, *dove* V *è un intorno di* $u_o\in D$, $D = \mathscr{D}(L)$. *Se*

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s,u_2);L(D,X)\right\| \le k(|t-s|^{\beta} + \|u_1-u_2;D\|),\ t,s\in[o,\tau],\ u_1,u_2\in V,$$

$$w_o = Mu_o$$

$$g(o,u_o)\ (= F(o,u_o)-(I+T'(o))Lu_o) \in \mathcal{R}(ML^{-1}) = M(D),$$

allora vale la conclusione del Teorema 4.

Un esempio banale. Trovare u,v regolari da $[o,\tau]$ in $R(\ oC)$ tali che

$$\begin{cases} (u+v)'(t) = -u(t) + v(t)^2 \\ \qquad o = -v(t)+1-u(t)^2 \end{cases},\ o\le t\le\tau\ ,$$
$$u(o) + v(o) = 0\ .$$

Si noti che, posto $u(o) = u_o$, $v(o) = v_o$, deve essere $v_o = 1-u_o^2$ e quindi $u_o^2-u_o-1 = 0$, $v_o = -u_o$ (condizioni di compatibilità). Queste le ritroviamo nel Teorema 5.

$$\text{Si ha}\quad J_g(u_o,v_o) = \begin{bmatrix} -1 & 2v_o \\ -2u_o & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2u_o \\ 2u_o & 1 \end{bmatrix}$$ e questa è invertibile. La condizione $g(o,u_o)\in\mathcal{R}(ML^{-1})$ diventa

$$\begin{bmatrix} -u_o + v_o^2 \\ -v_o+1-u_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\quad \text{per certi}\ \ x,y\in R,$$

cioè $v_o = 1-u_o^2$. Infine la condizione iniziale impone $u_o + v_o = 0$.

Il problema

$$(P)_2 \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) = -L(t)u(t) + f(t,u(t)), \quad o\leq t\leq \tau, \\ Mu(t)_{|t=0} = w_o, \end{cases}$$

nel caso in cui $D(L(t)) = D$ è indipendente da t, è trasformato in

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + L(o)u(t) = [L(o)-L(t)]u(t)+f(t,u(t)), \quad 0\leq t\leq \tau, \\ Mu(t)_{|t=0} = w_o. \end{cases}$$

Ne segue che se valgono (4), (5) (la condizione su $L'(t)$ può essere eliminata applicando il Teorema 1 direttamente), f è $C^{(1)}$ su $[o,\tau] \times V$, a valori in X, essendo V un intorno di $u_o \in D$,

$$(7) \qquad \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial f}{\partial u}(s,u_2); L(D;X)\right\| \leq k(|t-s|^\beta + \|u_1-u_2;D\|),$$

$0\leq s,t\leq\tau$, $u_1,u_2 \in V$,

$f(o,u_o) - L(o)u_o \in \mathscr{R}(ML(o)^{-1})$,

$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(o,u_o); \mathscr{L}(D;X)\right\|$ piccolo,

allora $(P)_2$ ha una unica soluzione locale.

D'altra parte, scrivendo

$$- L(t)u(t)+f(t,u(t)) = -L(o)u(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(o,u_o)u(t) +$$

$$+ [L(o)-L(t)]u(t) + [f(t,u(t)) - \frac{\partial f}{\partial u}(o,u_o)u(t)] ,$$

riconosciamo che se valgono la (4) con L sostituita da $L(o) - \frac{\partial f}{\partial u}(0,u_0)$ (si potranno applicare teoremi di perturbazione) e la (5), $\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ soddisfa la (7) e $f(o,u_0)-L(o)u_0 \in \mathscr{R}\,(M[L(o) - \frac{\partial f}{\partial u}(o,u_0)]^{-1})$, possiamo concludere con esistenza, unicità e regolarità di una soluzione per $(P)_2$.

Nelle applicazioni che seguono si cercano soluzioni a valori reali, partendo dalla assunzione che il problema *lineare* associato abbia, in relazione a dati a valori reali, soluzione a valori reali.

Applicazione 1: *Equazioni semilineari*

Sia $\Omega \subset R^n$ un dominio limitato con frontiera regolare $\partial\Omega$ e siano $A(t,x,D), B(t,y,D), 0 \le t \le \tau$, $x \in \bar\Omega$, $y \in \partial\Omega$, operatori differenziali come nell'esempio 1.

Sia $f(t,u_1,u_2,\ldots,u_{2m})$ una funzione di classe $C^{(2)}$ in $t \in [o,\tau]$,

$$u_1 \in R,\ u_2 \in R^n, \ldots, u_{2m} \in R^{n^{2m-1}} ;$$

sia

$$\tilde F(t,u)(x) = f(t,u(x),\ Du(x),\ldots,D^{2m-1}u(x)),$$

dove D^j sta per il generico operatore $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, $|\alpha|=j$, $K_1+\ldots+k_n=j$, $0 \le j \le 2m-1$, $\alpha=(k_1,\ldots,k_n)$.

Formalmente, attraverso notazione matriciale,

$$\left(\frac{\partial \tilde F}{\partial u}(t,u)v\right)(x) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u(x),\ldots,D^{2m-1}u(x))v(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t,u(x),\ldots,D^{2m-1}u(x))Dv(x) +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m}}(t,u(x),\ldots,D^{2m-1}u(x))D^{2m-1}v(x),$$

dove $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(t,u)$ denota la derivata di f rispetto alla (j+1)-esima variabile, $j = 1,2,\dots,2m$.

Vogliamo applicare il Teorema 3 a $X = L^p(\Omega)=Y, 1<p<\infty$, $Y_1 = W^{2m,p}(\Omega)$.

Sia $p>n$.

Siano $u_1,u_2 \in W^{2m,p}(\Omega)$, $\|u_1;W^{2m,p}(\Omega)\|, \|u_2;W^{2m,p}(\Omega)\| \leq R, R>0$.

Allora, in virtù del Teorema di immersione di Sobolev, [11, p. 208], se τ è piccolo,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(t,u_1(x),Du_1(x),\dots,D^{2m-1}u_1(x)) - \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(s,u_2(x),\dots,D^{2m-1}u_2(x))\right| \leq$$

$$\leq C(R)\{|t-s|+|u_1(x)-u_2(x)|+|Du_1(x)-Du_2(x)|+\dots+|D^{2m-1}u_1(x)-D^{2m-1}u_2(x)|\} \leq$$

$$\leq C(R)\{|t-s|+\|u_1-u_2;C(\bar\Omega)\|+\dots+\|D^{2m-1}u_1-D^{2m-1}u_2;C(\bar\Omega)\|\} \leq$$

$$\leq C'(R)\{|t-s|+\|u_1-u_2;W^{2m,p}(\Omega)\|\}.$$

Pertanto, poichè di nuovo il suddetto teorema di Sobolev assicura che F è differenziabile rispetto a u, si ha

$$\left|\left(\left[\frac{\partial \tilde F}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial \tilde F}{\partial u}(s,u_2)\right]v\right)(x)\right| \leq C''(R)(|t-s|+\|u_1-u_2;Y_1\|)\sum_{j=0}^{2m-1}|D^j v(x)|$$

$$t,s \in [0,\tau], \quad \|u_1;Y_1\|, \|u_2;Y_1\| \leq R,$$

Si noti che, per mostrare la differenziabilità di $\tilde F$,

$$[\tilde F(t,u+h)-\tilde F(t,u)](x) = f(t,u(x)+h(x),Du(x)+Dh(x),\dots,D^{2m-1}u(x)+D^{2m-1}h(x)) -$$

$$- f(t,u(x),Du(x),\dots,D^{2m-1}u(x)) =$$

$$= \int_0^1 \frac{f}{d\theta}(t,u(x)+\theta h(x),\ldots,D^{2m-1}u(x)+\theta D^{2m-1}h(x))d\theta =$$

$$= \int_0^1 \{\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u(x)+\theta h(x),\ldots,D^{2m-1}u(x)+\theta D^{2m-1}h(x))h(x)+$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t,u(x)+\theta h(x),\ldots)Dh(x) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m}}(t,u(x)+\theta h(x),\ldots,D^{2m-1}u(x)+\theta D^{2m-1}h(x))D^{2m-1}h(x)\}d\theta.$$

Ma allora

$$\|\frac{\partial F}{\partial u}(t,u_1)-\frac{\partial F}{\partial u}(s,u_2);\mathscr{L}(W^{2m,p}(\Omega);L^p(\Omega))\| \leq C(R)(|t-s|+\|u_1-u_2;W^{2m,p}(\Omega)\|),$$

$0 \leq t,s \leq \tau$ piccolo, $\|u_1;Y_1\|,\|u_2;Y_1\| \leq R$.

Il Lemma 5.3.4. in [15, p. 142] di nuovo assicura che l'ipotesi (H) è soddisfatta, con $\alpha=1$.

Pertanto, se $u_0 \in \mathscr{D}(L(o))$, le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o,u_0(x),\ldots,D^{2m-1}u_0(x))$ verificano $\sup_{x\in\bar{\Omega}} |\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o,u_0(x),\ldots,D^{2m-1}u_0(x))| \leq \eta$, con η sufficientemente piccolo e posto $v_0(x) = (L(o)u_0)(x) = A(o,x,D)u_0(x)$,

(8) $x \to f(o,u_0(x),Du_0(x),\ldots,D^{2m-1}u_0(x))-(I+\{\frac{d}{dt}L(t)^{-1}\}_{t=0})v_0(x) \in D(L(o))$

(ciò impone condizioni di regolarità a f e u_0), allora si applica il Teorema 3.

In casi semplici, come problema con condizioni di Dirichlet, dominio di $L(t) = L \equiv \mathscr{D}(L) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$, la (8) comporta che

$$x \to f(o,u_0(x),\ldots,D^{2m-1}u_0(x))-L(x,D)u_0(x)$$

per $x \in \partial\Omega$ si annulla, insieme alle derivate di ordine $\leq m-1$. Quindi, condizioni su $f(o,p_1,p_2,\dots,p_{2m})$.

Se, per esempio, $m = 1$, dovrà risultare

$$x \to f(o,u_o(x), Du_o(x)) - L(x,D)u_o(x) \in W^{2,p}(\Omega)$$

$$\text{e} \quad f(o,u_o(x), Du_o(x)) - L(x,D)u_o(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega .$$

Quindi, poichè $u_o \in W_o^{1,p}(\Omega)$, $u_o(x) = 0$ su $\partial\Omega$, se anche $L(x,D)u_o(x) = 0$ in $\partial\Omega$, la nostra richiesta si riduce a f, u_o regolari e

$$f(o,o,p) \equiv 0 \quad \forall p \in R^n.$$

Equazioni del tipo precedente sono state considerate da Pazy, Kielhöfer, Sinestrari-Vernole [10,11,12], ma senza regolarità temporale e con domini indipendenti da t.

Osservazione. La restrizione sulla piccolezza delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o,u_o(x),\dots,D^{2m-1}u_o(x))$$

può essere tolta [vedi l'osservazione seguente il Teorema 5] se $D(L(t))$ è indipendente da t e $-[L(o)- \frac{\partial F}{\partial u}(0,u_o)]$ genera, per esempio, un semigruppo analitico in $L^p(\Omega)$, con dipendenza regolare da t,u per $L(t)$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(t,u)$ come in (4), (5), (7).

Applicazione 2. *(Equazioni degeneri)*.

Mettiamoci nella situazione dell'Osservazione 3, con due forme sesquilineari $a_o(t;u,v)$, $a_1(u,v)$, $u,v \in V \hookrightarrow H$, $0 \leq t \leq \tau$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu)(t) + L(t)u(t) = F(u(t)), & 0 \le t \le \tau, \\ Mu|_{t=o} = w_o, \end{cases}$$

dove $L(t)$ e M sono gli operatori lineari associati a $a_o(t;u,v)$ e $a_1(u;v)$, rispettivamente, e F agisce da V in H in modo $C^{(1)}$ e

$$(8) \qquad \begin{cases} \|F'(u_1)-F'(u_2);\mathscr{L}(V;H)\| \le k\ \|u_1-u_2;V\|\ , \|u_i;V\| \le R\,, \\ \|F'(u_o);\mathscr{L}(V;H)\| \text{ piccola}, \quad u_o \in V, \\ w_o = Mu_o \\ F(u_o)-(I+T'(o))L(o)u_o \in \mathscr{R}(ML(o)^{-1})\ . \end{cases}$$

Per esempio, se $V = H^1_o(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

$$F(u)(x) = a(u(x)),$$

a di classe $C^{(1)}$ da R in sé, sempre per il Teorema di immersione di Sobolev, se $u_1, u_2 \in V$ e $\|u_i;V\| \le R$, si ha ($\Rightarrow |u_i(x)| \le C(R)$)

$$\int_\Omega |a'(u_1(x))h(x) - a'(u_2(x))h(x)|^2 dx \le C'(R) \int_\Omega |u_1(x)-u_2(x)|^2 |h(x)|^2 dx \le$$

$$\le C'(R) \int_\Omega [\sup_{x\ \Omega} |u_1(x)-u_2(x)|]^2\ |h(x)|^2 dx \le C''(R)\ \|u_1-u_2;V\|^2 \|h;V\|^2 .$$ Così, se $\sup_x |a'(u_o(x))|$ è convenientemente piccolo, e valgono le condizioni di compatibilità (8), il problema è risolto .

Nel caso in cui $a_0(t;u,v) = a_0(u,v)$, $a_1(u,v) = \int_\Omega m(x)u(x)\bar{v}(x)dx$, la (8) si legge: $\exists z \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$(9) \qquad \int_\Omega a(u_0(x))\bar{h}(x)dx - a_0(u_0,h) = a_1(z,h)$$

per ogni $h \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $\Omega =]0,1[$, $a_0(u,v) = \int_\Omega u'(x)\bar{v}'(x)dx$.

Allora, se u_0 è regolare,

$$a_0(u_0,h) = -\int_\Omega u_0''(x)\bar{h}(x)dx$$

e la (9) si traduce in

$$a(u_0(x)) + u_0''(x) = m(x)z(x) \quad x \in \Omega, \text{ z opportuno elemento di } H_0^1(\Omega)$$

(compatibilità con l'equazione differenziale in $t = 0$).

Applicazione 3. (Equazioni di Navier-Stokes astratte, 1° approccio). Siano A,C,K operatori lineari chiusi da X in sé, da Z in X e da X a Y, rispettivamente, X,Y,Z spazi di Banach, tali che -A genera un semigruppo olomorfo in X ed X può essere rappresentato come

$$X = N(K) \oplus R(C).$$

Studiamo l'esistenza di $u \in C_0[0,\tau;D(A)] \cap C^{(1)}[0,\tau;X]$, $p = p(t) = Cq(t) \in C[0,\tau;X]$ per cui

$$(P_3)\quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = p(t) + F(t,u(t)) + k(t), & 0\le t\le \tau, \\ Ku(t) = 0, & o\le t\le \tau, \end{cases}$$

dove F è continua da $[o,\tau]xY_1$ in X, e Y_1 è un altro spazio di Banach tale che $D(A) \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow X$ e $h\in C[o,\tau;X]$. Diremo che una tale coppia (u,p) è una *soluzione* di $(P)_3$. Denotato con P l'operatore di proiezione su N(K), notiamo che se $u\in C_o[o,\tau;D(A)]\cap C^{(1)}[o,\tau;X]$ soddisfa

$$(10)\qquad u'(t) + Au(t) = PF(t,u(t)) + Pk(t), \quad o\le t\le \tau,$$

allora la coppia (u,p), con

$$p(t) = (P-1)\ \{F(t,u(t)) + k(t)\}$$

è una soluzione della equazione in $(P)_3$. Così $(P)_3$ è soddisfatta se, inoltre, $Ku(t) = 0\ \forall t\in[o,\tau]$.

Assumiamo

(Q)

Esistono due operatori lineari chiusi $\mathscr{A},\mathscr{B}$ *definiti nello spazio di Banach* J *tali che* $\mathscr{A},\mathscr{B}$ *commutino (nel senso che i risolventi di essi commutano) e valga* (A), (B) *con* $\mathscr{A}$,I,$\mathscr{B}$ *al posto di* L,M *e* B, *rispettivamente, con* J *al posto di* E = F, *e*

$KAu = \mathscr{A}Ku$, $u\in\mathscr{D}(KA)$,

$KBu = \mathscr{B}Ku$, $u\in\mathscr{D}(KB)$.

Qui, naturalmente, B denota l'operatore $u \to u'$, $\mathscr{D}(B) = \{u\in C_0'[o,\tau;X];\ u'(o)=o\}$

Ora, la soluzione u di (10) è necessariamente definita da

$$u = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (z+A)^{-1}(B-z)^{-1}P\{F(\cdot,u(\cdot)) + k\}dz$$

e allora

$$Ku = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (z+\mathscr{A})^{-1}(\mathscr{B}-z)\ KP\{F(\cdot,u(\cdot))+k\}dz = 0$$

Così, sotto la condizione (Q), se $-A$ genera un semigruppo olomorfo in X, $(t,y) \to F(t,y)$ è $C^{(1)}$ su $[o,\tau]xY_1$ (a valori in X), dove $D(A) \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow X$,

$$(11)\quad \begin{cases} \|\frac{\partial F}{\partial u}(t,u_1) - \frac{\partial F}{\partial u}(s,u_2), \mathscr{L}(Y_1,X)\| \leq k(|t-s|+\|u_1-u_2;Y_1\|), \\ o\leq t,s\leq\tau,\quad \|u_1;Y_1\|, \|u_2;Y_1\| \leq r,\quad k\in C^{(1)}[o,\tau;X], \text{dove } r\in R^+, \\ P\{F(o,o) + k(o)\}\in D(A)\ ,\ \frac{\partial F}{\partial u}(o,0) = 0, \end{cases}$$

si può applicare il Teorema 3.

Analizziamo il problema $(P)_3$ con condizione iniziale $u_o \neq 0$: Trovare $u\in C[o,\tau;D(A)]\cap C^{(1)}[o,\tau;X]$, $p\in C[o,\tau;X]$ tali che

$$(P)_4\quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = p(t) + F(t,u(t)) + k(t),\quad o\leq t\leq\tau, \\ Ku(t)=0,\ 0\leq t\leq\tau, \\ u(o) = u_o\in N(K)\cap D(A). \end{cases}$$

Sia, inoltre, $u_o\in D(KA)$, (cosicché $KA\,u_o = \mathscr{A}Ku_o) = 0$). Posto

$$u_1 = -Au_o + P\{F(o,u_o) + k(o)\}$$

$$v(t) = u(t) - u_o - tu_1,$$

se $u_1\in D(A)$, allora $(P)_4$ è ricondotto a

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t) + P[F(t,u(t)) + k(t)], & o \le t \le \tau, \\ u(o) = u_o, \end{cases}$$

e quindi a trovare $v \in C_o[o,\tau;D(A)] \cap C_o^{(1)}[o,\tau;X]$ tale che

$$v(t) + Av(t) = P\{F(t,v(t) + u_o + tu_1) + k(t)\} - Au_o - u_1 - tAu_1, \quad o \le t \le \tau.$$

Notiamo che se $g(v)$ è definito da

$$g(v)(t) = P\{F(t,v(t) + u_o + tu_1) + k(t)\} - Au_o - u_1 - tAu_1,$$

allora

$$v = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma z^{-1}(z+A)^{-1} B(B-z)^{-1} g(v)dz.$$

Ma

$$Kg(v)(t) = -K[Au_o + u_1] - tKAu_1 = -t\mathscr{A}Ku_1 = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

e così

$$Kv = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma z^{-1}(z+\mathscr{A})^{-1} \mathscr{B}(\mathscr{B}-z)^{-1} Kg(v)dz = 0$$

Segue che

$$Ku(t) = Kv(t) + tKa_1 = -t\mathscr{A}Ku_o = 0.$$

In definitiva,

<u>Proposizione 1.</u> *Valgano le precedenti assunzioni su* A,K,C *e* (Q).

Sia $u_o \in N(K) \cap D(A^2)$, $P\{F(o,u_o)+k(o)\} \in D(A)$, (11) *e*

$\|\frac{\partial F}{\partial u}(o,u_o);\mathscr{L}(Y_1;X)\|$ *sufficientemente piccolo.*

Allora $(P)_4$ *ha una soluzione locale* (u,p) *tale che* u', $Au \in C^\theta[o,\tau;X]$, $o<\theta<1$.

Osservazione. Se $\frac{\partial F}{\partial u}(o,u_o) \in \mathscr{L}(Y_1;X)$ è una perturbazione di $-A$ tale che $-(A - \frac{\partial F}{\partial u}(o,u_o))$ resta un generatore di un semigruppo analitico in X, la assunzione sulla piccolezza di $\|\frac{\partial F}{\partial u}(o,u_o);\mathscr{L}(Y_1;X)\|$ può essere evitata.

Esempio. Consideriamo il problema

$\partial u/\partial t + (u,\nabla)u - \Delta u = k - \nabla q$, in $[o,\tau] \times R^n$,

div $u = 0$ in $[o,\tau] \times R^n$,

$u(o,x) = u_o(x)$, $x \in R^n$,

$n \geq 2$, $u = (u_1(t,x),\ldots,u_n(t,x))$, $t \geq o$, $x \in R^n$, $q = q(t,x)$, $k = (k_1(t,x),\ldots,k_n(t,x))$.

Sia $p>n$.

$X = (L^p(R^n))^n$

$A = -\Delta$, $D(A) = (W^{2,p}(R^n))^n$

$F(u) = -(u,\nabla)u$, $u \in (W^{2,p}(R^n))^n$.

Posto P = operatore da proiezione su X_p = chiusura di $\{u \in (C_o^\infty(R^n))^n;$ div $u=0\}$ in $(L^p(R^n))^n$, basterà verificare le proprietà di regolarità di

$$G(u) = P(u,\nabla)u.$$

Ora, per p>n, $W^{2,p}(R^n)$ è un'algebra di Banach [2, p. 115] e

$$\|G(u+h)-G(u) - P(h,\nabla)u-P(u,\nabla)h \; ; \; L^p\| =$$

$$= \|P(h,\nabla)h;L^p\| \leq C\|h;W\| \; \|h,(W^{1,p})^n\| \leq C'\|h;(W^{2,p}(R^n))^n\|,$$

dove W denota lo spazio delle funzioni limitate da R^n in sè con $\|u;W\|=\sup\|u(x);R^n\|$. Si è utilizzato il fatto che se $\Omega \subseteq R^n$ ha la proprietà del cono [2, p. 66], $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso con continuità in $C_B^\circ(\Omega)$ (secondo la definizione: u continua e limitata su Ω). Inoltre, se $u_1,u_2,h \in (W^{2,p}(R^n))^n$, poichè

$$G'(u_i)h = P(h,\nabla)u_1+P(u_i;\nabla)h, \quad i = 1,2,$$

$$\|\{G'(u_1)-G'(u_2)\}h;X\| \leq C_1\|h,Y_1\| \; \|u_1-u_2;Y_1\|+C_2\|u_1-u_2;Y_1\| \; \|h;Y_1\|=$$

$$= C\|u_1-u_2;Y_1\| \; \|h;Y_1\| \;, \quad Y_1 = (W^{2,p}(R^n))^n,$$

e quindi

$$\|G'(u_1)-G'(u_2), \; L(Y_1,X)\| \leq C\|u_1-u_2;Y_1\|.$$

Finalmente, se $u \in (W^{3,p}(R^n))^n$, e $\tilde{\Delta}$ denota il laplaciano in $L^p(R^n)$, $D = W^{2,p}(R^n)$, allora

$$\mathrm{div}\Delta(u_1 \ldots u_n) = \tilde{\Delta}\,(\mathrm{div}(u,\ldots,u_n)),$$

e se $u_o \in (W^{2,p}(R^n))^n$, $-(A-G'(u_o))$ genera un semigruppo analitico.

Applicazione 4. (Equazioni di Navier-Stokes: 2° approccio).

Si considera $(P)_4$ sotto l'assunzione che la restrizione di $-PA = -A_1$ a $N(K)$ sia il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in $N(K)$.

Poichè $P \in \mathscr{L}(X;N(K))$, si possono applicare direttamente al problema

$$\begin{cases} (Pu)'(t) + A_1(Pu)(t) = P\{F(t,u(t))+k(t)\}, \ 0 \leq t \leq \tau, \\ (Pu)(o) = u_o, \end{cases}$$

tutta la precedente argomentazione.

Esempio. Sia Ω un dominio limitato di R^n con la proprietà del cono e $\partial\Omega$ regolare. Si considera il problema di Stokes

$$\begin{cases} \partial u/\partial t + (u,\nabla)u - \Delta u = k - \Delta p, & \text{in} \quad [o,\tau]\times\Omega, \\ \text{div} = 0 & \text{in} \quad [o,\tau]\times\Omega, \\ u = 0 & \text{su} \quad [o,\tau]\times\partial\Omega, \\ u(o,x) = u_o(x) & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

E' noto [8, pp. 268-269] che $-PA_{|N(K)}$ è il generatore di un semigruppo olomorfo e

$$\|P(u,\nabla)v;(L^p(\Omega))^n\| \leq C\|u;(W^{1,p}(\Omega))^n\| \ \|v;(W^{1,p}(\Omega))^n\|,$$

per ogni $u,v \in (W^{1,p}(\Omega))^n$, se $p > n$.

Si ottengono, pertanto, condizioni sufficienti per la regolarità C^θ nel tempo *su tutto* $[o,\tau]$, cioè o incluso, della soluzione u. Per metodi diversi, vedi [8,16].

Applicazione 5. I Teoremi 4 e 5 si applicano a problemi come

$$u'(t) = -\tilde{A}(t)u(t) + f(t,u(t)), \quad 0 \le t \le \tau,$$

dove $\tilde{A}(t)$ è l'operatore in $C_0(\bar{\Omega})$ definito da operatori differenziali $A(t,x,D)$, $B_k(t,y,D)$, $k = 1,\dots,m$, come in [14, pp. 300-303], [13]
$t \in [0,\tau]$, $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \partial\Omega$, Ω aperto limitato regolare di R^n, e

$$f(t,u)(x) = f(t,u(x), Du(x),\dots,D^{2m}u(x)),$$

$0 \le t \le \tau$, $u \in Y_1 = \{u \in C_0(\bar{\Omega}),\ A(0,x,D)u \in C_0(\bar{\Omega}),\ u \in W^{2m,q}_{loc}(\Omega)\}$, $q > n$,
$f \in C^{(2)}([0,\tau] x R x R^n x \dots x R^{n^{2m}})$.

Vediamo il caso $m = n = 1$, $\Omega =]0,1[$, $A(0,\cdot,D)u = -u''$;

$$f(t,u+h)(x) - f(t,u(x)) = f(t,u(x)+h(x),u'(x)+h'(x),u''(x)+h''(x)) - -f(t,u(x),u'(x),u'(x))$$ implica

$$f(t,u+h)(x)-f(t,u)(x) - [\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u(x),u'(x),u''(x))h(x) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t,u(x),u'(x),u''(x))h'(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}(t,u(x),u''(x),u''(x))h''(x)] =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(t,u(x)+\eta h(x),u'(x)+\eta h'(x),u''(x)+\eta h''(x))d\eta - [\quad] =$$

$$= \int_0^1 [\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u(x)+\eta h(x),\dots,u''(x)+\eta h''(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(\dots)h'(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}(\dots)h''(x)]d\eta - [\quad] =$$

$$= \int_0^1 [\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u+\eta h,u'+\eta h',u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u,u',u'')]h(x)d\eta$$

$$+ \int_0^1 [\frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t,u+\eta h,u'+\eta h',u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t,u,u',u'')]h'(x)d\eta$$

$$+ \int_0^1 [\frac{\partial f}{\partial \xi_3}(t,u+\eta h,u'+\eta h',u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_3}(t,u,u',u'')]h''(x)d\eta.$$

Se $u,h \in Y_1$ e $\|h,Y_1\| \leq \delta$, si ha

$$\|f(t,u+h)-f(t,u)-[\quad]: C(\bar{\Omega})\| \leq C\| h; \; Y_1\|^2 .$$

Analogamente, esiste $\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)$, e valgono le stime del tipo (K). Se vale (H) (ciò equivale a regolarità dei coefficienti) e, posto $L(o)u_0 = v_0$

$$x \to f(o,u_0(x),u_0'(x),u_0''(x)) - (I+T'(o))v_0)(x) \in \mathcal{D}(L(o)),$$

[se $T'(o)v_0 \in \mathcal{D}(L(o))$, basterà assumere che $v_0 \in \mathcal{D}(L(o))$, cioè

$u_0 \in \mathcal{D}(L(o)^2)$ e $x \to f(o,u_0(x),u_0'(x), u_0''(x)) \in \mathcal{D}(L(o))$] e se

$\sup_x \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right. (o,u_0(x),u_0'(x),u_0''(x))\Big|$ è piccolo, $j = 1,2,3$, allora il Teorema 3 si applica.

Si ripete un analogo discorso, utilizzando i Teoremi 4 e 5, per il problema

$$u'(t) = a(t,u(t)), \quad o \leq t \leq \tau.$$

[vedi, per impostazione simile, [3,4]].

<u>Applicazione 6.</u> In [17], W. von Wahl ha recentemente studiato la risolubilità globale di

$$\begin{cases} u' - f(\Delta u) = 0 \quad f'>0 \;, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subset R^n \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ u(o) = \phi. \end{cases}$$

E' chiaro che il problema (di risolubilità locale)

$$u' = f(A(t)u) \quad f : X \to X$$

$$u(o) = u_o \in D(A(o))$$

può essere ricondotto al tipo qui descritto. Posto $A(t)u = v$, $u' = f(A(t)u)$ diventa

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}v) = f(v),$$

e se $v_o = A(o)u_o$, scrivendo

$$f(v) = f'(v_o)v + \{f(v) - f'(v_o)v\},$$

le condizioni per applicare il Teorema 3 riguarderanno la famiglia di operatori $f'(v_o)A(t)$. Nel caso $x = C(\bar{\Omega})$, $[f'(v_o)A(t)u](x) = f'(v_o(x))A(t,x,D)u(x)$ e si capisce la condizione $f' > 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ACQUISTAPACE-B. TERRENI: Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic eqs., J. Math. Anal. Appl. 99 (1984), 4-64.

[2] R.A. ADAMS: Sobolev Spaces, ed. Academic Press (1975).

[3] G. DA PRATO: Abstract differential equations, maximal regularity, and linearization, Proceedings of Symp.Pure Math. (ed. F. Browder), Vol. 45 (1980), Part 1, 359-370.

[4] G. DA PRATO-P. GRISVARD; Equations d'évolution non linéaires de type parabolique, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120 (1979), 329-396.

[5] A. FAVINI-P. PLAZZI, On some abstract degenerate problems of parabolic type. 1; The linear case, in corso di stampa in "Nonlinear Analysis".

[6] ——————————, Ibid. 2: The non linear case, in corso di stampa in "Non linear Analysis".

[7] A. FAVINI: Implicit integrodifferential equations, in corso di stampa su Proceedings PITMAN.

[8] Y. GIGA-I. MIYAKAWA: Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem, Arch. Rat. Mech. & Anal. 89 (1985), 267-281.

[9] T. KATO-H. TANABE: On the abstract evolution equations, Osaka Math. J. 14 (1962), 107-133.

[10] H. KIELHÖFER: Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolischer Rand-Anfangwertprobleme, Math. Z. 142 (1975), 131-160.

[11] A. PAZY: Semigropus of linear operators and applications to partial differential equations, ed. SPRINGER, 1983.

[12] E. SINESTRARI-P. VERNOLE: Semilinear evolution equations in interpolatiion spaces, Nonlinear Anal. 1 (1977), 244-261.

[13] H.B.STEWART:Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators, Trans. AMS 199 (1974), 141-162.

[14] ——————— ; Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions, Trans. AMS 259 (1980), 299-310.

[15] H. TANABE: Equations of evolution, ed. PITMAN, 1979.

[16] W. von WAHL: The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations, ed. Vieweg & John, 1985.

[17] ———— : On the equation $u'-f(\Delta u)=0$, Boll. UMI (7), 1-A (1987), 437-441.